PGCA009 –Inteligência Computacional
Aula 6 Rede de Hopfield

Prof. Angelo Loula

Mestrado em Computação Aplicada (UEFS)

John Hopfield

- 1983: “Neural networks and physical systems with emergent collective computational abilities”
- Um dos marcos do renascimento das pesquisas em rede neurais
- Proposta de uma rede neural com conexões recorrentes que representava um sistema dinâmico

Redes Recorrentes

- Redes neurais recorrentes: conexões entre neurônios descrevem ciclos direcionados
- Ciclos criam estados internos na rede permitindo comportamento temporal dinâmico
- Em um sistema dinâmico, o seu estado futuro (e sua saída) depende do estado atual (e também de sua entrada, se for o caso)

Redes Recorrentes

- Dinâmica:
  - Discreta: $x(t) = x(t-1)+5$
  - Contínua: $du/dt = u - uv$

    $dv/dt = -v + uv$

- Trajetória: sequência de estados assumidos pelo sistema ao longo do tempo
- Em sistemas determinísticos, a trajetória depende somente do estado inicial e das entradas

Redes Recorrentes

- Comportamento estacionário:
  - em t→ infinito, sistema assume somente um conjunto finito de estados
- Comportamento transiente:
  - trajetória do sistema antes de comportamento estácionário
- Atrator: região do espaço de estados para o qual as trajetórias próximas (base de atração) convergem
  - Ponto fixo (ou de equilíbrio) e Ciclo limite

Redes de Hopfield

- As rede neurais artificiais de Hopfield representam sistemas dinâmicos
- São redes neurais com conexão de cada neurônio com todos os demais (mas não com si mesmo)
- Cada neurônio tem N entradas com pesos associados e possui saída que é mantida até o neurônio ser atualizado

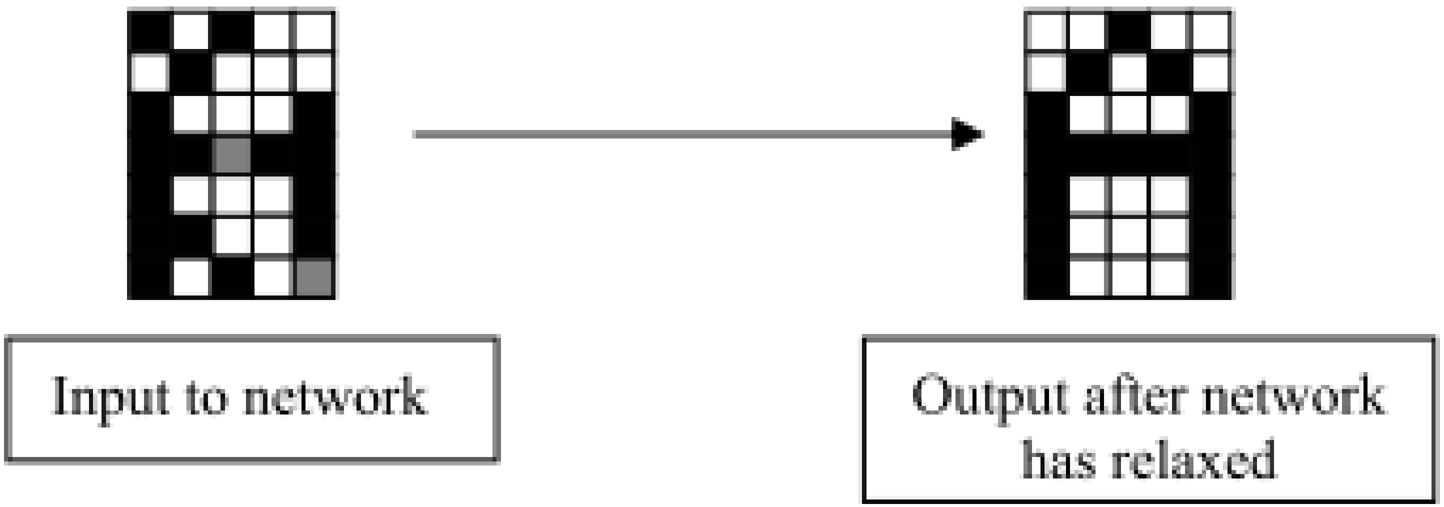
Redes de Hopfield

- Atualizar um neurônio envolve
  - Cada entrada x_i é multiplicada pelo peso w_i
  - Soma-se $\sum x_i.w_i$
  - Se $\sum x_i.w_i \geq 0$, a saída é +1 senão é -1
- A conexão entre um neurônio i e um neurônio j é dada por w_{ij}
- Os pesos de conexões entre os mesmos neurônios são simétricos $w_{ij} = w_{ji}$ (mas $w_{ii}=0$)
- A saída de um neurônio é a entrada para os demais

Redes de Hopfield

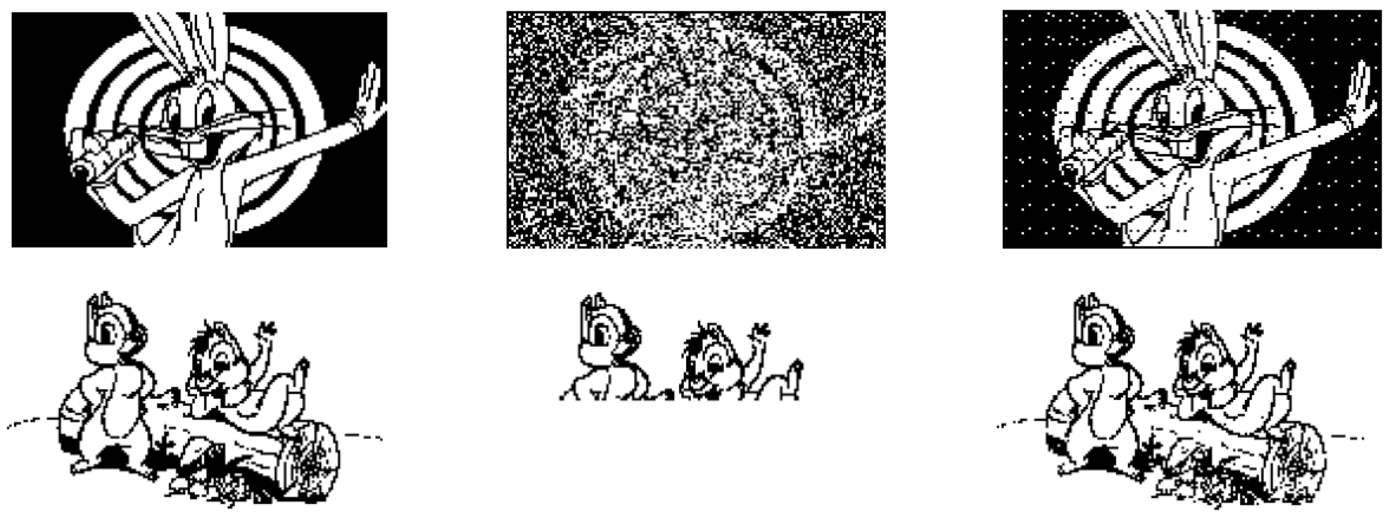
- A dinâmica (de atualização) da rede pode ser:
  - Assíncrona: Um neurônio é atualizado por vez, a cada instante
  - Síncrona: Todos neurônios são atualizados simultaneamente, no mesmo instante
- Para dinâmica assíncrona, $w_{ij} = w_{ji}$ e $w_{ii}=0$, a rede converge para pontos de equilíbrio
- Pontos de equilíbrio = Memória (endereçada por conteúdo)

Redes de Hopfield



Fonte: www4.rgu.ac.uk/files/chapter7-hopfield.pdf

Redes de Hopfield



memórias | entradas | padrões restaurados

Fonte: slides do prof. Fernando von Zuben (Unicamp)

Redes de Hopfield

- É preciso então mapear cada padrão a ser memorizado em um ponto de equilíbrio
- A memorização de padrões na rede segue o aprendizado de Hebb: neurônios com a mesma ativação tem pesos positivos e com saídas opostas tem pesos negativos
- Para armazenar vetores binários (-1,+1) de N dimensões a rede de Hopfield terá N neurônios

Redes de Hopfield

- suponha que se queira armazenar um conjunto de p padrões dados por vetores N-dimensionais (palavras binárias), denotados por $\{\xi_\mu \mid \mu=1,\ldots,p\}$.
- para tanto, basta definir os pesos pela aplicação da regra de Hebb generalizada, ou regra do produto externo. Seja $\xi_{\mu i}$ o i-ésimo elemento do vetor ξ_μ, então o peso sináptico conectando o neurônio i ao neurônio j é definido por

$$w_{ji} = \frac{1}{N}\sum_{\mu=1}^{p}\xi_{\mu j}\xi_{\mu i}\,,$$

sendo que novamente toma-se $w_{jj} = 0$ ($j = 1,\ldots,N$).
- seja $\mathbf{W}$ a matriz $N \times N$ de pesos sinápticos, onde w_{ji} é o elemento da j-ésima linha e i-ésima coluna. Então, é possível expressar a regra do produto externo na forma:

$$\mathbf{W} = \frac{1}{N}\sum_{\mu=1}^{p}\xi_\mu\xi_\mu^T - \frac{p}{N}\mathbf{I}\,.$$

- observe que $\mathbf{W} = \mathbf{W}^T$, ou seja, $w_{ji} = w_{ij}$ ($i,j = 1,\ldots,N$).

Fonte: slides do prof. Fernando von Zuben (Unicamp)

Redes de Hopfield

- Para recuperar um padrão, um vetor de entrada para a rede é tomado como o estado inicial da rede
- Seguindo a dinâmica assíncrona, com escolha aleatória do neurônio a ser atualizado a rede converge para um ponto de equilíbrio (sem mudanças de estado)

Redes de Hopfield

- Existe um valor de energia E associado com cada estado da rede de Hopfield
- Nesta função de energia E, os pontos de equilíbrio são associados a pontos de mínimo de energia

- para a rede neural de Hopfield considerada, com $w_{ji} = w_{ij}$, $w_{jj} = 0$ ($R_j \to \infty$) e $\theta_j = 0$ ($i,j = 1,\ldots,N$), a função de energia pode ser definida na forma:

$$E = -\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{N} w_{ji} y_i y_j = -\frac{1}{2}\mathbf{y}^T \mathbf{W} \mathbf{y}$$

onde $y_j = \operatorname{sgn}(u_j) = \operatorname{sgn}\left(\sum_{\substack{i=1 \\ i\neq j}}^{N} w_{ji} y_i\right)$ ($j=1,\ldots,N$).

Fonte: slides do prof. Fernando von Zuben (Unicamp)

Redes de Hopfield

- Não existem pontos de equilíbrio somente para padrões memorizados, há também atratores espúrios
- A capacidade da memória é limitada, surge ruído quando os padrões não são ortogonais
- Há somente um número limitado de padrões ortogonais, acima disso surge ruído

Redes de Hopfield

- através de um estudo estatístico, supondo, dentre outros aspectos, que as memórias fundamentais são formadas por padrões gerados aleatoriamente, é possível mostrar que a relação sinal-ruído é dada aproximadamente por

$$\rho \cong \frac{N}{K}, \text{ para valores elevados de } K.$$

- com isso, o componente de memória fundamental ξ_ν será estável (em sentido probabilístico) se, e somente se, a relação sinal-ruído for suficientemente alta.

- valores sugeridos na literatura para ρ (repare que K é o número de memórias):

1. $\rho = 7{,}25$, ou $\dfrac{1}{\rho} = 0{,}138$ ($K = 138$ quando $N = 1000$);

2. $\rho \geq 2 \ln N \Rightarrow K \leq \dfrac{N}{2 \ln N}$ ($K \leq 72$ quando $N = 1000$)